

به نام او



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان

مرحله دوم سیزدهمین کارسوق بزرگ ریاضیات- دوره ی مهرگان

مراکز راهنمایی شهید اژه ای يك و فرزنانگان امین دو اصفهان - واحد پژوهشی

پنجشنبه- ۱۰ اسفند ماه ۱۳۹۱

مدت آزمون : ۴ ساعت

به نکات زیر کمال توجه رو داشته باشید:

بازهم سلام!

- ۱- قبل از هر چیز قبولی شما رو در مرحله اول تبریک می‌گیم.
- ۲- نوشتن مشخصات بالای هر برگه الزامیه. پس حتماً نام، نام خانوادگی و نام مرکزتون رو بالای تمام برگه ها با خط خوانا بنویسید.
- ۳- در هر برگه فقط پاسخ يك سوال رو بنویسید. در غیر اینصورت فقط پاسخ یکی از سوالات اون برگه تصحیح می شه!
- ۴- نوشتن جواب آخر به تنهایی هیچ نمره ای نداره پس برای همه ک سوالات راه حلتون رو کامل توضیح بدید.
- ۵- به راه حل نمره تعلق می گیره ، پس حتی اگه به جواب نرسیدید راه حل رو بنویسید.
- ۶- ترتیب سوالات اصلن از آسون به سخت نیست پس تمام سوالات رو بخونید.
- ۷- اگه به جواب نرسیدید نا امید نشید! وقت دارید که بیشتر فکر کنید!
- ۸- امتحان ۵ تا سوال داره، که نمره ک اون ها به ترتیب ۹، ۱۳، ۲۴، ۳۳ و ۲۱ است.
- ۹- نتایج امتحان اواخر اردیبهشت ۱۳۹۲ اعلام می شه.

شروع دوباره

بعد از آن خواب بسیار جذاب، شکامه هر شب با امید بازگشت به دوران کارسوقیان به خواب می رفت . اما شب ها، هفته ها و ماه ها گذشت و خبری از شاه مهرگان نشد تا این که بلاخره یک شب شاه مهرگان به خواب شکامه آمد. اما ...
اما این بار شکامه به گذشته بازنگشته بود بلکه شاه مهرگان به زمان حال آمده بود.
ابتدا شاه مهرگان خیلی از دیدن وسایل جدید و پیشرفت های بشری لذت برد و تعجب کرد، مخصوصن از موبایل بسیار خوشش آمد. ولی بعد از چند

ساعت به فکر تاج و تخت و حکومت افتاد و از شکامه پرسید که من چگونه می توانم حکومت کنم؟ من به حکومت کردن عادت دارم!!!
شکامه جواب داد تو دیگر نمی توانی به حکومت استبدادی خود ادامه دهی، چون در اینجا دموکراسی حکم فرما است! ولی می توانی در انتخابات ریاست
جمهوری شرکت کنی و ...
شاه گذشته و مهرگان کنونی، تصمیم به شرکت در انتخابات گرفت و شروع به رقابت با دیگر نامزدها کرد...

پرسش نخست: پیک نیک



در این انتخابات ۱۲ نفر دیگر به همراه مهرگان (مجموعاً ۱۳ نفر) شرکت کرده بودند، که از ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده بودند.

یک روز قرار شد تمام نامزدها برای تظاهر به دوستی با هم به پیک نیک بروند، ولی مشکل این بود که تعدادی از آن ها حتی نمی توانستند به دوستی تظاهر کنند، و اگر در راه با هم در یک ماشین قرار میگرفتند دعوایشان می شد. بعد از بررسی های انجام شده مسئولین ستاد انتخابات به این نتیجه رسیدند که نامزدهایی که باقیمانده ی حاصل ضرب شماره ی آن ها بر ۳ برابر با ۱ است، اگر در راه در یک ماشین قرار بگیرند با هم دعوایشان می شود! هدف مسئولین این بود که هیچ دعوایی انجام نشود و همه با هم به محل پیک نیک برسند! آنها برای این جایجایی ماشین هایی در اختیار داشتند که قابلیت حمل هر تعداد مسافری را داشت.
به نظر شما آن ها باید حداقل از چند ماشین استفاده کنند تا بی هیچ دعوایی همه با هم به مقصد برسند؟

پرسش دوم: اتاق تاریک



پس از رسیدن به محل دائمی برگزاری اردو های انتخاباتی، نامزدها با اتاقی مواجه شدند که در آن ۳ لامپ خاموش و بیرون آن ۴ کلید وجود داشت که هر کدام به تعدادی از لامپ ها متصل بود همچنین کنار درب ورودی راهنمایی به شکل زیر قرار گرفته بود:

راهنما:

- ❖ اگر کلیدی تغییر وضعیت داده شود تمام لامپ های متصل به آن تغییر وضعیت می یابند (خاموش به روشن و روشن به خاموش)
- ❖ مجموعه لامپ های متصل به هیچ دو کلیدی یکسان نیست. (برای مثال نمی شود کلید ۱ و ۲ هر دو تنها به لامپ ۲ متصل باشند).
- ❖ هر لامپ حداقل به یک کلید و هر کلید حداقل به یک لامپ متصل است.

ثابت کنید به ازای هر حالت از اتصال کلید و لامپ ها می توان به گونه ای کلیدها را تغییر وضعیت داد که همه ی لامپ ها روشن شوند.



پرسش سوم: مناظره یا مسابقه؟؟؟

دور اول انتخابات به خوبی و با شرکت حداکثری مردم برگزار شد ولی چون تعداد آرای هیچ یک از نامزد ها به حد نصاب نرسید کار به دور دوم کشیده شد. در این دور فقط دو نامزدی که بیشترین رای را در دور اول آورده بودند شرکت داشتند و آنها کسانی نبودند جز "مهرگان" و "لطیفه محمدیان"!

برای آنکه مردم بتوانند راحت تر نامزد اصلح را تشخیص دهند ستاد تصمیم به برگزاری یک مسابقه بین دو نامزد گرفت؛ شرح مسابقه به شکل زیر بود:



صفحه ای به شکل زیر داریم، و نامزدها به نوبت روی آن بازی را انجام می دهند. هرکس در نوبت خود در یکی از دایره های خالی یک عدد طبیعی بین ۱۰۰- تا ۱۰۰ می نویسد و این بازی تا پر شدن تمام دایره ها ادامه می یابد. (اعداد می توانند خود ۱۰۰ و ۱۰۰- نیز باشند).

بعد از اتمام بازی برنده با این روش مشخص می شود که برای هر خط روی آن اختلاف دو سر آن نوشته می شود (یعنی برای خطی به شکل $(a) \rightarrow (b)$ روی آن مقدار $a - b$ نوشته می شود) و سپس همه ی مقادیر نوشته شده با هم جمع می شوند، اگر حاصل این جمع مثبت بود، مهرگان و اگر منفی بود، خانم محمدیان برنده بازی است و اگر این مقدار برابر با صفر شد نتیجه بازی مساوی می شود.

چون مهرگان در دور اول انتخابات تعداد رای بیشتری کسب کرده، او شروع کننده ی بازی است. به نظر شما چه کسی و با چه روشی می تواند برنده ی بازی باشد؟ (روش خود را با دلایل کافی، کامل شرح

دهید.)



پرسش چهارم: کاخ

بعد از این که مهرگان با رای مردم به عنوان رئیس جمهور انتخاب شد، تصمیم گرفت برای خود کاخی به اسم کاخ سبز بسازد.

همه چیز به خوبی پیش می رفت تا این که یک روز آقا حیدر، برقکار ساختمان، از طبقه ۷۳ به پایین افتاد و ...

خلاصه برقکاری کاخ نیمه کاره رها شده بود و این برای مهرگان که می خواست زود ساخت کاخ را تمام کند یک بدشانسی بزرگ بود.

او در سختی ها تنها راهی که بلد بود کمک گرفتن از شکامه بود؛ این شد که با گوشی تلفن همراه خود با شکامه تماس گرفت تا از او کمک بخواهد. او بعد از

تعریف کردن داستان برای او شرایط کاخ را اینگونه توصیف کرد:

"در حال حاضر از ساختمان کاخ ۱۵ سیم آویزان است (یعنی یک سر آن ها در پشت بام و سر دیگر آن ها در طبقه ی همکف است!) ولی سیم ها در بین راه

به هم گره خورده اند و به همین دلیل مشخص نیست سر و ته هر سیم کدام است." و ادامه داد: "من از تو میخواهم به من بگویی که سر و ته هر سیم کدام

است ولی اینجا ما برای این کار فقط یک دستگاه به اسم "اسکولوسکوپ" داریم، که نحوه ی کار آن اینگونه است که اگر سرهای دیگر دو سیمی که به آن متصل

می کنیم به هم متصل باشند چراغ اسکولوسکوپ روشن می شود و در غیر این صورت چراغ آن خاموش می

ماند. (برای مثال در شکل مقابل چراغ اسکولوسکوپ شماره ۲ روشن و اسکولوسکوپ شماره ۱ خاموش است.)"

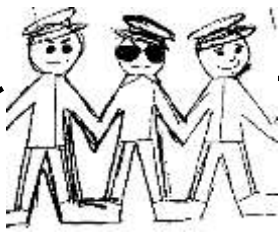


با توجه به بلندی ساختمان شکامه میخواهد با کمترین تعداد، بالا و پایین رفتن سر و ته سیم ها را پیدا کند

در هر مرحله شکامه هر جایی که باشد می تواند هر تعداد از سیم های آنجا را به هم وصل کند یا هر تعداد باری که خواست از اسکولوسکوپ استفاده کند.

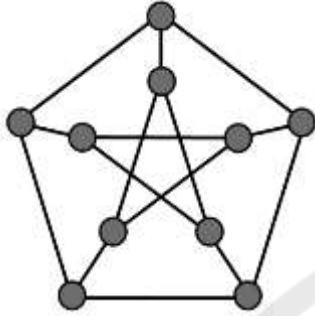
به نظر شما او حداقل چند بار باید بالا و پایین برود. (روش خود را کاملن شرح دهید.)

پرمش پنجم : فراری



بعد از به سرانجام رسیدن پروژه ی کاخ سبز و در مرحله بررسی هزینه های پروژه، معلوم شد یکی از پیمانکاران با نام اختصاری "پ.م" دزدی بزرگی انجام داده و فرار کرده است.

این مسئله مهرگان را بسیار ناراحت کرد. او برای چاره اندیشی طبق معمول سراغ شکامه رفت و با یک پیامک او را مسئول پیگیری این پرونده کرد. شکامه بعد از بررسی و تحقیقات فراوان به اطلاعات زیر دست یافت:



- نقشه ی کشور به شکل روبرو است.
- پ.م از کشور خارج نمی شود.
- فقط در آغاز هر روز ابتدا پ.م و سپس هریک از پلیس ها شهر خود را عوض می کنند و با عبور از تنها یک جاده به یکی از شهر های همسایه می روند. (در طول روز هیچ جابجایی ای وجود ندارد).

• اگر یک پلیس و پ.م در یک شهر قرار گیرند، پلیس پ.م را دستگیر می کند.

شکامه برای انجام این کار از مهرگان، ۳ پلیس درخواست کرد، از آنجایی که شکامه مبتلا به بیماری "عمرن کمتر بشه" است، همه ی کارها را با استفاده از کمترین تعداد انجام می دهد.

هر نقطه نشانگر یک شهر و خط نشانگر یک جاده

حال ثابت کنید ۳ پلیس کمترین تعداد پلیسی است که به وسیله ی آن ها می توان حتمن پ.م را دستگیر کرد. (یعنی ثابت کنید با ۲ پلیس نمی توان به دستگیری پ.م مطمئن بود).

- دقت شود که خود شکامه در فرآیند دستگیری شرکت ندارد و فقط به پلیس ها دستور می دهد.

آخیییییش، تموم شد !!!

شکامه با کمک پلیس ها موفق به دستگیری مجرم فراری، پ.م شد و در حال بردن اون برای مهرگان بود که از خواب پرید تا مدت ها منتظر بشه برای

این که دوباره خواب دوست خوبش رو ببینه!



همیته موفقی بانتید !!!