

به نام خدا



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره استعدادهای درخشان استان اصفهان
دبیرستان استعداد های درخشان شهید اژه ای یک اصفهان (دوره اول)
دبیرستان استعداد های درخشان فرزندگان امین دو اصفهان (دوره اول)

هفدهمین کارسوق بزرگ ریاضیات (دوره مهرگان)

آزمون مرحله دوم
جمعه ۸ اردیبهشت ماه ۱۳۹۶
زمان شروع امتحان: ۸ صبح
زمان پایان امتحان: ۱۱ صبح

لطفا قبل از خواندن سوالات توصیه های این صفحه را یک دور با آرامش کامل بخوانید:

فراموش نکنید مشخصات خود را بدقت در بالای پاسخ برگ بنویسید.
ممکن ایده حل سوالی در ابتدا به ذهن نرسد ، ناامید نشوید و بیشتر فکر کنید.
تمام جواب ها را تا حد ممکن خوانا بنویسید.
به همراه داشتن ماشین حساب و هرگونه برگه اضافه ممنوع می باشد.

سوال ۱- پایان جدید داستان

کنون رزم سهراب رانم نخست
از آن کین که او با پدر چون بجست



اول داستان را که همه بلدیم، حداقل تا آن جایی که رستم و سهراب به پیکار با هم پرداختند و رستم سهراب را تقریباً شکست داده بود. از این جا به بعد اما داستان فرق می کند، ناگهان سهراب بازوبندی که مادرش به او داده بود را از بازویش جدا می کند و مانند میتی کومان آن را رو به رستم می گیرد و ادعا می کند که پسر اوست. روی بازوبند عدد ۲۴

نوشته شده است؛ رستم که به دلیل جنگ‌های بسیار زیاد به بیماری فراموشی مبتلا شده قضیه بازوبند سهراب را به درستی به خاطر نمی آورد و شک دارد که بازوبند سهراب اصلی است یا از نسخه‌های وارداتی از توران است. تنها چیزی در حافظه‌ی رستم باقی مانده است این مطلب است که بازوبندی اصلی است که به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت p ، عدد $1 - p^2$ بر عدد روی آن بازوبند بخش پذیر باشد. به سهراب کمک کنید که اثبات کند بازوبند او اصلی است. او را از مرگ برهانید و پایان جدیدی برای داستان رقم بزنید. (به بیان دیگر باید ثابت کنید برای هر عدد اول p ، $1 - p^2$ بر ۲۴ بخش پذیر است.)

سوال ۲- مناظرات "قوسراکی"

در جزیره‌ی دورافتاده‌ای در اقیانوس ناآرام به نام "قوسراکی" قبیله‌ای بدوی زندگی می کنند که برای حل مناظرات خود روش جالبی دارند. این روش که به صورت دو نفره برگزار می شوند این گونه‌اند که هر کس یک کلاه آبی یا قرمز روی سرش دارد. بازیکن ها می توانند کلاه نفر دیگر را ببینند ولی کلاه خودشان را نمی توانند ببینند. هر دو باید با شنیدن صدای سوت همزمان رنگ کلاه خود را بگویند. اگر دست کم یکی از آن دو به درستی رنگ کلاهش را حدس زده بود، بازی را می برند. فریدون که از جنگ و دعوای شاهنامه خسته شده تصمیم گرفته از شغل خود در شاهنامه استعفا دهد و به "قوسراکی" مهاجرت کند. حال فریدون و رستم با هم یک تیم تشکیل داده‌اند. این دو نفر قبل از بازی چه راهکاری را با یک دیگر هماهنگ کنند تا برنده شوند. (یک روش پیشنهاد دهید که از بین ای دو نفر حتما حداقل یک نفر رنگ کلاه خودش را درست حدس بزند.)

سوال ۳- ماردوش پشیمان بی رقیب و عصیان مارها

بعد از استعفای فریدون، ضحاک که دیگر در عرصه‌ی حکمرانی بی رقیب شده بود، به دلیل عدم وجود یک دشمن زیرک و مقتدر با یأس فلسفی مواجه شد. در همین میان وضعیت مارهای روی دوش‌های ضحاک هم روبه‌زوال گذاشت و هر روز بیش از روز پیش به عصیان و سرکشی آن‌ها افزوده شد. مشکلات زندگی، خرج و مخارج مملکت‌داری، نابسامانی اوضاع اقتصادی و فرهنگی و به ویژه مشکل عصیان مارها دست به دست هم

می دهند که ضحاک به زال که به تازگی یک حجره‌ی نقلی روان‌شناسی و مشاوره باز کرده بود مراجعه کند. زال به ضحاک که از کارهای گذشته خود پیشمان بود راه‌حلی برای رفع مشکل مارها و آزاد شدن را پیشنهاد داد که به کمک آن می‌توان یکی از مارها را کشت و ضحاک را به دامان پاک جامعه برگرداند. بدین صورت که بین مارها جنگ داخلی ایجاد کند. روند کار بدین شکل است که تعدادی مغز و دو مار روی دوش داریم. مار اول در حرکت اول می‌تواند هر تعداد مغز (حداقل یکی ولی نه به تعداد همه‌ی مغزها) که خواست بخورد. از این حرکت به بعد مارها نوبتی می‌توانند حداقل ۱ و حداکثر به اندازه تعداد مغزی که مار قبلی در حرکت قبلی خورده، بخورد. ماری که آخرین مغز را بخورد زنده می‌ماند (برنده می‌شود) و دیگری کشته می‌شود و از شرم این شکست دیگر رشد نخواهد کرد. (منظور از بردن یک نفر در قسمت‌های بعد سوال یعنی این که آن فرد می‌تواند طوری بازی کند که حریفش هر گونه بازی کند باز هم ببازد).

- الف) اگر تعداد مغزها فرد باشد کدام مار (مار اول یا مار دوم) می‌تواند ببرد و چگونه؟
ب) اگر تعداد مغزها مضرب چهار نباشد ولی زوج باشد. کدام مار (مار اول یا مار دوم) می‌تواند ببرد و چگونه؟
پ) اگر تعداد مغزها توان دو باشد کدام مار (مار اول یا مار دوم) می‌تواند ببرد و چگونه؟
ت) اگر تعداد مغزها توان دو نباشد کدام مار (مار اول یا مار دوم) می‌تواند ببرد و چگونه؟

سوال ۴ – در دسر فردوسی

طبق برنامه‌ریزی فردوسی قرار بود رستم و اسفندیار با هم بجنگند، اما رستم و اسفندیار که از جنگیدن خسته شده بودند تصمیم گرفتند علیه سیستم بربرانه و غیرمتمدنانه جنگ و گیس و گیس‌کشی قیام کنند و اعتراض خود را کتباً به او اعلام کنند. فردوسی که بابت نمردن سهراب، استعفای فریدون، استغفار ضحاک و هندی نشدن بخش‌هایی از شاهنامه تحت فشار توسط تهیه‌کننده (سلطان محمود غزنوی) است اما نمی‌خواهد سوپرستارهای خود را نیز ناراحت کند با اعتراض آن‌ها به شرطی که یک رقابت جذاب معرفی کنند موافقت می‌کند، اما رستم و اسفندیار چون اغلب زندگی‌شان را به بازی و هفت‌خوان و این‌ها گذرانده‌اند. هیچ ایده‌ی جذابی به جز مچ انداختن ندارند. به همین خاطر به سیمرخ که به تازگی نمایندگی شرکت بازی‌های فکری راه انداخته مراجعه می‌کنند و او هم بازی زیر را پیشنهاد می‌دهد. یک جدول ۸×۸ داریم. هر بازیکن در نوبت خود یک مهره در یک خانه‌ی خالی می‌گذارد (مهره‌های دو بازیکن یکسانند) هر کس یکی مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین (که ساق‌هایش مواز اضلاع مستطیل است) بسازد می‌بازد. حال فردوسی باید شاهنامه را کامل کند به او کمک کنید نتیجه نبرد رستم و اسفندیار را پیش‌بینی کند (یعنی کدام یک می‌تواند مستقل از این که حریف چگونه بازی کند بتواند طوری بازی کند که برنده شود).

سوال ۵ – بیژن و منیژه

پس از اتفاقات سوال قبل خود فردوسی هم به دلیل استرس بالا و عدم تامین بیمه‌ی مالی مناسب از شغل شاهنامه‌نویسی استعفا داد و به جزیره‌ی قوسراکی مهاجرت کرد. کوروش کبیر که نگران وضعیت استقبال مخاطبین شبکه‌ی خود بود به تهیه‌کننده برنامه (سلطان محمود غزنوی) دستور داد هر چه سریع‌تر

جایگزینی برای فردوسی بیابد. او هم در تلگرام به مولانا جلال‌الدین بلخی پیام داد که مسئولیت را بپذیرد. مولانا هم که به دنبال شغلی بود تا از فکر شمس بیرون بیاید این فرصت شغلی را پذیرفت. با ورود مولانا کلا همه چی عوض شد و او با تکیه بر لقب "رومی" که برخی طرفدارانش به او داده بودند سبک غربی و هالیوودی را پیش گرفت. مثلا در بخشی که قرار بود بیژن و منیژه به پیکار و کشتی تن‌به‌تن با هم بپردازند، برنامه بر این شد که با هم دوئل کنند، روند دوئل بدین شکل است که هر کس در ابتدا باید خشابش را پر کند و در ادامه هر دو طرف به طور هم‌زمان همه‌ی تیرهایشان را شلیک می‌کنند البته تا زمانی که تیرهای یک طرف تمام نشده است تیرها در هوا به هم برخورد می‌کنند و می‌افتند. روند پر کردن خشاب‌ها هم بدین صورت است که روی یک نوار ۱۰۰ جعبه قرار گرفته‌اند و روی هر کدام تعداد تیرهای داخل آن نوشته شده است (تعداد تیرهای یک خشاب می‌تواند هر عدد طبیعی ای باشد). بیژن و منیژه در هر مرحله می‌توانند یکی از دو جعبه‌ی چپ و راست نوار (چپ‌ترین جعبه یا راست‌ترین جعبه) را بردارند. با فرض این که بیژن نفر اول باشد پیش‌بینی کنید کدام یک می‌تواند طوری خشابش را پر کند که حتما زنده بماند (یعنی حریف هر طوری باز کنید باز هم بتواند بازی را ببرد).

۳۱	۴	۱۰۰۲	۵	...	۹۱	۱۲	۲۳
----	---	------	---	-----	----	----	----

نمای یک وضعیت دلخواه از نوار و خشاب های روی آن
(دقت کنید عدد روی خشاب ها می تواند هر عدد طبیعی (عدد بدون اعشار بزرگ تر از صفر) ای باشد
و در این وضعیت نفری که نوبت او است می تواند خشاب ۲۳ تایی یا ۳۱ تایی را انتخاب کند)

سوال ۶ – دوران بازنشستگی

فردوسی، فریدون و رستم که در مناطق آزاد قوسراکی به دور از همه‌ی هیاهوهای شاهنامه، توران و... از دوران بازنشستگی خود لذت می‌برند، با صفحه‌ی شطرنج مانده در گمرکات سیمرخ و حقوق بازنشستگی فردوسی بازی‌ای را طراحی می‌کنند. ابتدا رستم از اتاق خارج می‌شود. سپس فردوسی ۶۴ سکه روی خانه‌های این جدول قرار می‌دهد که به طور تصادفی هر کدام پشت یا رو است. فردوسی (که از زمان بازنشستگی با گاندولف زیاد می‌پلکد) یکی از خانه‌های این جدول را جادو می‌کند. فریدون می‌فهمد که کدام خانه جادو شده است. او دقیقا یکی از سکه‌ها را در صفحه برمی‌گرداند از پشت به رو یا برعکس. حال رستم وارد اتاق می‌شود و باید با نگاه به جدول بفهمد فردوسی کدام خانه را جادو کرده است. اگر بفهمد، فردوسی به او و فریدون تضمین می‌دهد از این به بعد تورانیان همیشه شکست خواهند خورد. همه‌ی بازیکنان از قوانین اطلاع دارند. قبل از آغاز بازی رستم و فریدون با هم مشورت می‌کنند. آیا آن‌ها می‌توانند برنده شوند و خطر حمله توران را برای همیشه رفع کنند؟

موفق باشید